المحاضرة الخامسة

البرمجة الخطية LINEAR PROGRAMMING

تعد البرمجة الخطية أحد الأساليب الرياضية التي يستخدمها مدير المزرعة في إعداد خطة المزرعة، على أساس تحديد الاستخدام الأمثل لعناصر الإنتاج المتوفر لديه ولغرض الوصول إلى أعلى إنتاج ممكن، أو أعلى ربح ممكن أو تحمل المشروع أقل تكاليف ممكنة.

فعند وجود عدد من الموارد المحدودة (العمل، مواد أولية، مساحة أرضية، رأس مال..إلخ) تشترك معاً في إنتاج سلعة أو تقديم خدمة، فإنه يمكن تشكيل مسألة برمجة خطية لحساب وإيجاد أفضل تخصيص *Optimal Allocation* لهذه الموارد، وذلك لتحقيق هدف معين (مع وجود قيود على بعض أو كل الموارد سواءً في النوعية أو الكمية)

وتسمى الدالة في مسالة البرمجة والمراد إيجادا أفضل حل [إما تعظيم أو تقليل (تدنية)] الدالة الهدف Objective Function أما التعابير الرياضية Mathematical Expression التي تشير إلى الموارد وتحدد كميتها فتسمى بالقيود Constraints وعندما تكون العلاقات بين المتغيرات سواء دالة الهدف أو القيود، خطية فإن مسألة البرمجة تسمى بمسألة البرمجة الخطية.

فرضيات البرمجة الخطية:

١- العلاقات خطية Linear Relationship: تعني فرضية الخطية، بأن العلاقات بين المتغيرات سوءاً في دالة الهدف أو القيود يجب أن تكون خطية بسيطة (أي أنها لا تحتوي على ضرب أو قسمة بين المتغيرات ولا يوجد واحد أو أكثر من المتغيرات مرفوع لقوة).

١- الإضافية Addition: تفترض البرمجة الخطية أيضا إمكانية الإضافة الحسابية المباشرة لنواتج أساليب الإنتاج المختلفة.

٢- عدم السالبية Non-Negative Values: تشير هذه الفرضية إلى أن قيم كافة المتغيرات في مسألة البرمجة الخطية يجب أن تكون غير سالبة أي موجبة، كما أن كافة القيود يجب أن تكون غير سالبة أي موجبة، أي أن كافة القيود يجب أن تدل على عدم سالبية المتغيرات.

٣- النتائج بأرقام حقيقية: إن قيم المتغيرات، أو الاحتياج من الموارد لكل وحدة واحدة في هذه المتغيرات تكون أعداد حقيقية.

طرق حل مسائل البـرمجة الخطية:

أولا- الحل البياني:

يتطلب تطبيق الحل البياني أن يكون عدد المتغيرات اثنان فقط حتى يمكن تمثيلهما على المحور الأفقي والرأسي.

لشرح الطريقة نحل المثال التالي:
إذا كانت إحدى المزارع تنتج منتجين هما Y_1 ، Y_2 وأنه يدخل في إنتاجهما عنصرا إنتاج هما X_1، X_2 فإذا كان إنتاج المنتج Y1 يحتاج إلى وحدتين من X_1 ووحدة واحدة من X_2 بينما إنتاج المنتج Y2 يحتاج إلى وحدة واحدة من X_1 وثلاث وحدات من X_2 وأن المزارع بإمكانه فقط استخدام 24 وحدة من عناصر الإنتاج لإنتاج Y_1 و 21 وحدة لإنتاج Y_2 .
فإذا كان كل وحدة إنتاج من المنتج Y1 تعطي ربحاً قدره 4 ليرة بينما كل وحدة من المنتج Y2 تعطي ربحاً قدره 6 ليرة
المطلوب:
إيجاد الكميات المثلى الواجب إنتاجها من المنتجين حتى يحقق المزارع أعلى ربح ممكن.
للحل نتبع الخطوات التالية:

١- تحديد الدالة الهدف وهي دالة الربح الممثلة بالعلاقة:

$$\prod = 4\ Y_1 + 6\ Y_2$$

٢- وضع القيود حسب الفرضيات على الشكل التالي:

$$2\ X_1 + X_2 \leq 24$$

$$X_1 + 3\ X_2 \leq 21$$

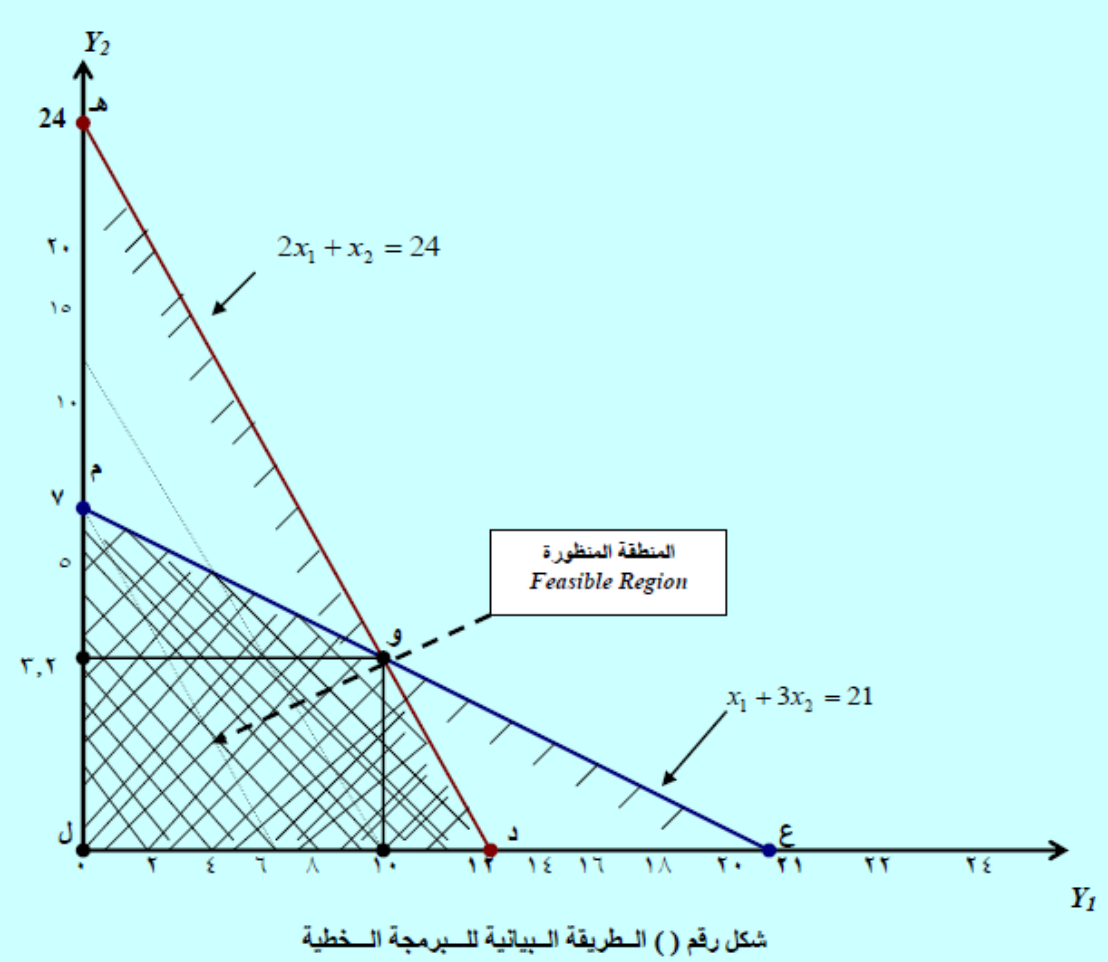
شرط عدم السالبية

$$Y_1 \geq 0 \quad , \quad Y_2 \geq 0$$

٣- نمثل الدالة والقيود بيانياً كما يلي:

- رسم المحورين العمودي والأفقي حيث يمثل Y1 على المحور الأفقي و Y2 على العمودي (الجزء الموجب من كل منهما)

- تحديد نقطتين لكل مستقيم (من معادلة القيد بمساواة X1 بالصفر في المرة الأولى و X2 بالصفر في المرة الثانية)
- رسم المستقيمات المعبرة عن المعادلات
- تحديد منطقة الإمكانيات المتاحة التي يحددها المستقيمان.
- تعيين النقطة ضمن منطقة الإمكانيات المتاحة التي تعطي أفضل النتائج (أعلى عائد أو أقل تكلفة) وعادة تكون نقطة تقاطع مستقيمات وتكون في حالة تعظيم الأرباح أبعد ما يكون عن نقطة الأصل وتكون في حالة تقليل التكاليف أقرب ما يكون من نقطة الأصل.



شكل رقم ( ) الـطريقة الـبيانية للـبرمجة الـخطية

من الرسم نجد أنه بالكميات المتاحة من عنصري الإنتاج يمكن أن ننتج أي توليفة من المنتجين تقع ضمن المنطقة المظللة (ل د و م) وتسمى هذه المنطقة بالمنطقة المنظورة أي أن الحل يمكن أن يقع في أي نقطة داخل أو على حدود هذه المنطقة.

ثم تحديد النقطة التي عندها يكون الربح أعلى ما يكون وهنا يأتي دور الدالة الهدف. حيث نقوم برسم الدالة الهدف، ولرسمها يجب معرفة قيمة الربح لذا نفترض قيمة واحدة للربح ونرسم معادلة المستقيم بشكل مشابه للقيود ثم نحرك المسطرة بشكل موازي للمستقيم الناتج ونرسم مستقيمات

ذات ميل ثابت موازية للمستقيم السابق. ويجب ملاحظة أن جميع مستقيمات دالة الهدف متوازية بعض النظر عن اختلاف قيم ∏، وذلك لأن ميل المستقيمات ثابت لا يتغير، والذي يغير ميل المستقيم هي معاملات X2, X1 وليس قيمة ∏.

وبما أننا نبحث عن تعظيم الربح لذا سوف نختار المستقيم الذي يمس المنطقة في أبعد مكان عن نقطة الأصل. وبما أن خط الربح لا يوازي أحد القيدين سيكون الحل حكماً أحد نقاط الزوايا لمنطقة الحل الممكنة. وفي حالتنا هذه تكون النقطة (و) هي الحل المنشود.

وبإسقاط عمودين على المحورين نوجد إحداثيات النقطة و (١٠ ، ٣,٢) التي تمثل التوليفة المثلى من عناصر الإنتاج.

ثانياَ- الحل الرياضي:

كما ذكرنا سابقاً بأنه من الشكل السابق وبحدود المتاح من الموردين فإنه يمكن إنتاج أي توليفة من المنتجين Y_2،Y_1 تقع على المنحنى (م و د) أو على يساره .أي أن مساحة الشكل المحدب (ل م و د) المنطقة المنظورة) يوجد بداخلها أو على حدودها جميع التوليفات التي يمكن إنتاجها من المنتجين ووفق الإمكانيات المتاحة من الموردين X1 و X2 بالتالي تكون الحلول المقترحة تتمثل في زوايا الشكل المحدب. بالتالي نحل جبريا حسب الجدول:

الحلول المقترحة	Y1	Y2	الدالة الهدف $\prod=4Y_1+6Y_2$	قيمة الربح
ل	٠	٠	٠ + ٠	٠
م	٠	٧	٤٢ + ٠	٤٢
و	١٠,٢	٣,٢	١٩,٢ + ٤٠,٨	٦٠
د	١٢	٠	٠ + ٤٨	٤٨

من الجدول يتبين أن أقصى ربح ممكن هو ٦٠ وتحققه النقطة وهي نقطة تقاطع القيدين.