

## المبرنة السادسة

ثالثاً- حل البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس Simplex

نفترض أن لدينا المشكلة التالية:

$$z = x + y \quad \text{Maximize}$$

Subject to:

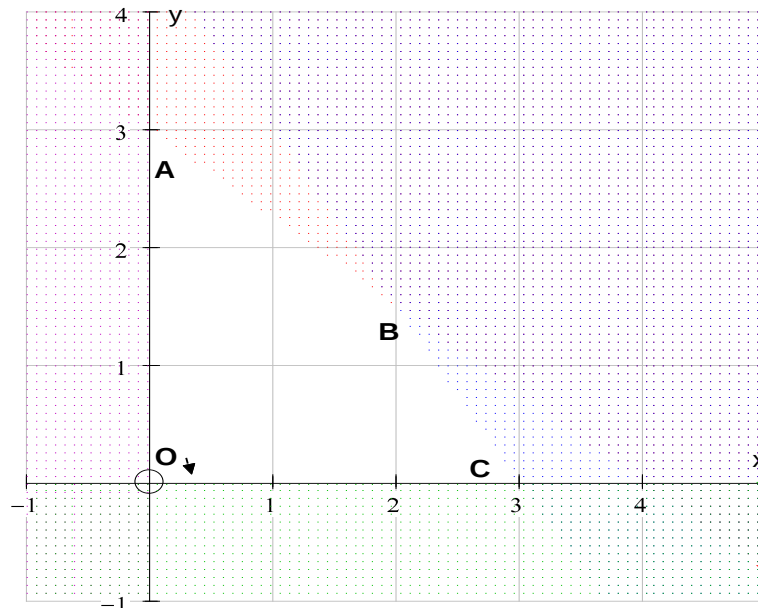
$$3x + 4y \leq 12$$

$$3x + 2y \leq 9$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

كما نعلم فإن الحل المثالي يقع في واحدة من زوايا منطقة الحلول المقبولة اقتصادياً (ABCO)

والموضحة في الشكل التالي:



Since the  $x$  axis is the line where  $y = 0$  and the  $y$  axis where  $x = 0$ , let us define  
AB as  $u = 0$  and BC as  $v = 0$ .

The vertices are now the points where exactly two of  $x$ ,  $y$ ,  $u$  and  $v$  are zero.

$$x = y = 0 \quad \text{At } O \quad \text{I.e.}$$

$$x = u = 0 \quad \text{At } A$$

$$u = v = 0 \quad \text{At } B$$

$$v = y = 0 \quad \text{At } C$$

## طريقة السمبلكس

الخطوة الأولى: تحويل المتباينات (المتراجحات) إلى معادلات ( حالة تساوي = ) ويتم ذلك بإضافة أو طرح متغيرات إضافية مثلا (  $u, v$  ) لاحظ أن إضافة أصفار للمعادلات لا يغير من قيمتها، ولذلك يمكن كتابة المعادلات السابقة (القيود) كالتالي :

$$3x + 4y + u + 0v + 0z = 12$$

$$3x + 2y + v + 0u + 0z = 9$$

$$\text{With } x \geq 0, y \geq 0, u \geq 0 \text{ and } v \geq 0$$

ونحول الدالة الهدف إلى مساواة كما يلي

$$z - x - y + 0u + 0v = 0$$

نوزع أمثال المتغيرات في القيود ودالة الهدف حسب الجدول التالي ليكون السطر الأخير يمثل الدالة الهدف. والسطرين الأول والثاني يمثلان القيود.

|   | x  | y  | u | v | z |    |
|---|----|----|---|---|---|----|
| u | 3  | 4  | 1 | 0 | 0 | 12 |
| v | 3  | 2  | 0 | 1 | 0 | 9  |
|   | -1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0  |

نبحث عن أكبر قيمة سالبة في السطر الأخير (أكبر القيم السالبة بالقيمة المطلقة مثال لو كان لدينا القيمتان ١- و ٢- نختار ٢-)، ونسمي العمود الذي تحتويه هذه القيمة (العمود المحوري PIVOT COLUMN) وفي مثالنا هذا يوجد قيمتين سالبتين متساويتين (١-) لذا فنحن أحرار في اختيار العمود المحوري. سنختاره هنا العمود x.

| $x$          | $y$ | $u$ | $v$ | $z$ |    |
|--------------|-----|-----|-----|-----|----|
| 3            | 4   | 1   | 0   | 0   | 12 |
| 3            | 2   | 0   | 1   | 0   | 9  |
| -1           | -1  | 0   | 0   | 1   | 0  |
| Pivot column |     |     |     |     |    |

الخطوة التالية هي تحديد السطر المحوري (PIVOT ROW) ويكون ذلك بقسمة عناصر العمود الأيمن على عناصر العمود المحوري  $x$ . ويظهر الجدول التالي الطريقة، ثم نختار الصف المقابل لأصغر قيمة موجبة ناتجة. وهي في مثالنا هذا  $3 = 9 \div 3$

| $x$          | $y$ | $u$ | $v$ | $z$ |    |                          |
|--------------|-----|-----|-----|-----|----|--------------------------|
| 3            | 4   | 1   | 0   | 0   | 12 | $12 \div 3 = 4$          |
| 3            | 2   | 0   | 1   | 0   | 9  | $9 \div 3 = 3$ Pivot row |
| -1           | -1  | 0   | 0   | 1   | 0  |                          |
| Pivot column |     |     |     |     |    |                          |

القيمة التي يحددها تقاطع كل من العمود المحوري مع السطر المحوري نطلق عليها العنصر المحوري (PIVOT ELEMENT) وهي هنا تساوي 3

نحتاج لجعل قيمة العنصر المحوري مساوية للواحد. لنقوم بذلك نقسم على 3 ومن ثم يجب قسمة جميع عناصر الصف المحوري على 3.

|             | $x$ | $y$   | $u$ | $v$   | $z$ |    |
|-------------|-----|-------|-----|-------|-----|----|
|             | 3   | 4     | 1   | 0     | 0   | 12 |
| $R2 \div 3$ | 1   | $2/3$ | 0   | $1/3$ | 0   | 3  |
|             | -1  | -1    | 0   | 0     | 1   | 0  |

الخطوة التالية هي جعل جميع عناصر العمود المحوري عدا العنصر المحوري مساوية للصفر.  
نحقق ذلك بالنسبة للعنصر في السطر الأول بطرح ٣ أمثال السطر المحوري من السطر الأول

$$R1 - 3R2$$

|                              | $x$ | $y$ | $u$ | $v$ | $z$ |   |
|------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|---|
| <b><math>R1 - 3R2</math></b> | 0   | 2   | 1   | -1  | 0   | 3 |
|                              | 1   | 2/3 | 0   | 1/3 | 0   | 3 |
|                              | -1  | -1  | 0   | 0   | 1   | 0 |

وبجمع عناصر السطر المحوري إلى عناصر السطر الثالث نساوي القيمة الأخيرة في العمود المحوري بالصفر. ونحصل على قيمة جديدة لـ  $z$ .

|                             | $x$ | $y$  | $u$ | $v$ | $z$ |   |                  |
|-----------------------------|-----|------|-----|-----|-----|---|------------------|
|                             | 0   | 2    | 1   | -1  | 0   | 3 |                  |
|                             | 1   | 2/3  | 0   | 1/3 | 0   | 3 |                  |
| <b><math>R3 + R2</math></b> | 0   | -1/3 | 0   | 1/3 | 1   | 3 | New value of $z$ |

طالما لا يزال لدينا قيمة سالبة في السطر الأخير، فذلك يعني أننا لم نصل للحل الأمثل. لذا يجب إعادة العملية السابقة وتحديد عمود محوري جديد وستر وعنصر محوري جديدين.

يصبح السطر المحوري الجديد ممثلاً لـ  $x$  (العمود المحوري)

|                       | $x$ | $y$  | $u$ | $v$ | $z$ |   |
|-----------------------|-----|------|-----|-----|-----|---|
|                       | 0   | 2    | 1   | -1  | 0   | 3 |
| <b><math>x</math></b> | 1   | 2/3  | 0   | 1/3 | 0   | 3 |
|                       | 0   | -1/3 | 0   | 1/3 | 1   | 3 |

بما أن العمود  $y$  يحتوي أعلى قيمة سالبة (القيمة الوحيدة السالبة في السطر الأخير) لذا نعتبره العمود المحوري الجديد.

ونختار السطر المحوري المقابل لأدنى قيمة موجبة ناتجة عن قسمة العمود الأخير على العمود المحوري وهو السطر الأول حسب الجدول والعنصر المحوري هو ٢

| $x$ | $y$          | $u$ | $v$   | $z$ |   |                    |           |
|-----|--------------|-----|-------|-----|---|--------------------|-----------|
| 0   | 2            | 1   | -1    | 0   | 3 | $3 \div 2 = 1.5$   | Pivot row |
| 1   | $2/3$        | 0   | $1/3$ | 0   | 3 | $3 \div 2/3 = 4.5$ |           |
| 0   | $-1/3$       | 0   | $1/3$ | 1   | 3 |                    |           |
|     | Pivot column |     |       |     |   |                    |           |

بما أن العنصر المحوري ٢ فيلزم قسمة السطر المحوري على ٢ ليصبح العنصر المحوري ١

| $R1 \div 2$ | $x$ | $y$    | $u$   | $v$    | $z$ |       |
|-------------|-----|--------|-------|--------|-----|-------|
|             | 0   | 1      | $1/2$ | $-1/2$ | 0   | $3/2$ |
|             | 1   | $2/3$  | 0     | $1/3$  | 0   | 3     |
|             | 0   | $-1/3$ | 0     | $1/3$  | 1   | 3     |

وحتى نجعل العناصر الباقية في العمود المحوري أصفاراً نطرح من السطر الثاني ثلثي السطر

الأول  $R2 - \frac{2}{3}R1$  ونجمع للسطر الثالث ثلث السطر المحوري  $R3 + \frac{1}{3}R1$

|              | $x$ | $y$ | $u$    | $v$    | $z$ |       |
|--------------|-----|-----|--------|--------|-----|-------|
|              | 0   | 1   | $1/2$  | $-1/2$ | 0   | $3/2$ |
| $R2 - 2/3R1$ | 1   | 0   | $-1/3$ | $2/3$  | 0   | 2     |
| $R3 + 1/3R1$ | 0   | 0   | $1/6$  | $1/6$  | 1   | 3.5   |

|     | $x$ | $y$ | $u$    | $v$    | $z$ |       |
|-----|-----|-----|--------|--------|-----|-------|
| $y$ | 0   | 1   | $1/2$  | $-1/2$ | 0   | $3/2$ |
| $x$ | 1   | 0   | $-1/3$ | $2/3$  | 0   | 2     |
|     | 0   | 0   | $1/6$  | $1/6$  | 1   | 3.5   |

بما أن عناصر الصف الأخير جميعها موجبة نكون قد توصلنا للحل النهائي ويكون الحل المفترض هو

$$x = 2$$

$$y = \frac{3}{2}$$

$$z = 3\frac{1}{2} = (3.5)$$

وهذا الحل يقابل النقطة في التي تمثل الحل البياني.